



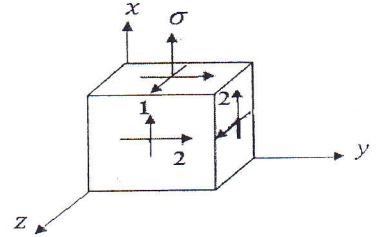
Examen

11/02/2023.

Exercice N°1 (Micro) : (5 points)

Soit un état de contrainte en un point (M) d'un milieu continu est donné dans un repère orthonormé par le tenseur σ_{ij} .

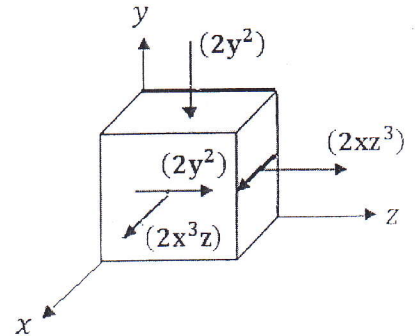
- 1- Déterminer la valeur de σ_{xx} pour lequel le vecteur contrainte est nul.
- 2- Trouver les composants du vecteur unitaire normal à ce plan $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.



Exercice N°2 : (7.5 points)

Dans un repère (x, y, z) , l'état de contrainte dans un plan (P) orthonormé pour un corps solide est défini par :

- 1- Donner la forme que doit avoir les forces volumique pour que l'équilibre local soit satisfait.
- 2- Calculer le vecteur de contrainte agissant sur le plan (P) au point (M) par les composants suivants $(1,1,1)$, la contrainte normal et la contrainte tangentielle, avec le vecteur unitaire normal, est défini par $\vec{n} = (\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_3)$.
- 3- Calculer au point (M) les contraintes principales et les directions principales.
- 4- Déduire la contrainte de cisaillement maximale $\tau_{\max}$ au point (M).
- 5- Porter ces résultats à aide du cercle de Mohr.
- 6- Donner le tenseur sphérique et déviateur associé au tenseur de contrainte.



Exercice N°3 : (7.5 points)

Un milieu continu déformable est soumis à un champ de déplacement tridimensionnel donné, dans un repère $(0, x_1, x_2, x_3)$, trois composants :

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} u_1 = 2k_1(x_1^2 - x_3) + k_2x_2 \\ u_2 = -k_2(5x_1 + \frac{3}{4}x_3^2) \\ u_3 = \frac{1}{2}(3k_2x_2x_3 + 4k_1x_1) \end{cases} \quad \text{Avec : } k_1 \text{ et } k_2 \text{ sont des constantes.}$$

- 1- Déterminer le tenseur des déformations qui dérivent de $\mathbf{u}$ (mm).
- 2- Déterminer les points qui ne subissent au chargement de volume par $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$.
- 3- Calculer les déformations principales au point (P) $(1, 1, 1)$.



1- Déterminer la valeur de σ_{xx} pour lequel le vecteur contrainte est nul $\vec{T}(M, \vec{n}) = 0$.

On a : $\{\vec{T}(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)]\{\vec{n}\} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$ (0,25)

Produit matrice vecteur :

- $\sigma_{xx}n_1 + (2)n_2 + (1)n_3 = 0$ eq n°1.
- $(2)n_1 + (0)n_2 + (2)n_3 = 0$ eq n°2.
- $(1)n_1 + (2)n_2 + (0)n_3 = 0$ eq n°3.
- $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ eq n°4.

Par l'eq n° 2 : $2n_1 + 2n_3 = 0$

Par l'eq n° 3 : $1n_1 + 2n_2 = 0$

On remplace n_3 et n_2 dans l'eq n°4 :

$n_1^2 + (-\frac{1}{2}n_1)^2 + (-n_1)^2 = 1 \rightarrow \frac{9}{4}n_1^2 = 1$; $\rightarrow$ Donc

On peut trouver les valeurs de n_2 et n_3 par la valeur n_1 :

$n_1 = \frac{2}{3}; n_2 = -\frac{1}{3}; n_3 = -\frac{2}{3}$ (0,25)

; $\rightarrow$ Donc $\{\vec{n}\} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{Bmatrix}$ (0,25)

$[\sigma(M)]\{\vec{n}\} = 0$

$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{Bmatrix} = 0$ Par l'eq n° 1 : $\sigma_{xx} \frac{2}{3} + (2) - \frac{1}{3} + (1) - \frac{2}{3} = 0$ eq n°1

$\sigma_{xx} \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \rightarrow \sigma_{xx} \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow \sigma_{xx} \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow \sigma_{xx} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$

Donc $\sigma_{xx} = 2$.

$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (0,25)

2- Trouver les composants du vecteur unitaire normal à ce plan $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$[\sigma(M)]\{\vec{n}\} = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ (0,25)

Produit matrice vecteur :

- $(2)l + (2)m + (1)n = 0$ eq n°1'.
- $(2)l + (0)m + (2)n = 0$ eq n°2'.
- $(1)l + (2)m + (0)n = 0$ eq n°3'.
- $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ eq n°4'.

Par l'eq n° 2 : $2l + 2n = 0$

Par l'eq n° 3 : $1l + 2m = 0$

On remplace n et m dans l'eq n°4 :

$l^2 + (-\frac{1}{2}l)^2 + (-l)^2 = 1 \rightarrow \frac{9}{4}l^2 = 1$; $\rightarrow$ Donc

On peut trouver les valeurs de n et m par la valeur l :

$n = -l$
 $m = -\frac{1}{2}l$

$l^2 = \frac{4}{9} \rightarrow l = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} \quad l = \frac{2}{3}$ (0,25)



$$l = \pm \frac{2}{3}; m = \pm \frac{1}{3}; n = \pm \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \text{Donc } \{\vec{n}\} = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pm \frac{2}{3} \\ \pm \frac{1}{3} \\ \pm \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$$

Solution Exercice N°2 : (7.5 points)

1- Donner les expressions des forces de volume à partir de tenseur (σ) au point (M).

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x^3z) & 0 & (2y^2) \\ 0 & (-2y^2) & 0 \\ (2y^2) & 0 & (2xz^3) \end{pmatrix}$$

- $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$; $F_x = -6x^2z$
- $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0$; $F_y = 4y$
- $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0$; $F_z = -6xz^2$

Donc :

$$f = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6x^2z \\ 4y \\ -6xz^2 \end{Bmatrix}$$

2- Calculer le vecteur de contrainte agissant sur le plan (P), la contrainte normal et la contrainte tangentielle, avec le vecteur unitaire normal au point (M) (1, 1, 1) est défini par :

$$[\sigma(M)] = \begin{pmatrix} (2x^3z) & (x-z) & (2y^2) \\ (x-z) & (-2y^2) & 0 \\ (2y^2) & 0 & (2xz^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2(1)^3(1)) & 0 & (2(1)^2) \\ 0 & (-2(1)^2) & 0 \\ (2(1)^2) & 0 & (2(1)(1)^3) \end{pmatrix}$$

$$[\sigma(M)] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_3\right).$$

$$\text{On a : } \{\vec{T}(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)]\{\vec{n}\}$$

$$\{\vec{T}(M, \vec{n})\} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (0)0 + (2)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (0)\frac{\sqrt{2}}{2} + (-2)0 + (0)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ (2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (0)0 + (2)\frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$

- le vecteur de contrainte $\{\vec{T}(M, \vec{n})\} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{Bmatrix}$

- Contrainte normal : On a : $\sigma_n = \{\vec{T}(M, \vec{n})\}^T \{\vec{n}\}$

$$\{\vec{T}(M, \vec{n})\} = \begin{Bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ 2\sqrt{2} \end{Bmatrix} / \{\vec{T}(M, \vec{n})\}^T = \{2\sqrt{2} \quad 0 \quad 2\sqrt{2}\} / \{\vec{n}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$



$$\sigma_n = \{\vec{T}(M, \vec{n})\}^T \{\vec{n}\} = \{2\sqrt{2} \quad 0 \quad 2\sqrt{2}\} \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} ; \rightarrow \sigma_n = 4. \quad (0,25)$$

➤ Contrainte tangentielle :

$$\tau_n = \sqrt{\vec{T}(M, \vec{n})^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{2\sqrt{2}^2 + 0^2 + 2\sqrt{2}^2 - (4)^2} ; \rightarrow \tau_n = 0 \quad (0,25)$$

3- Calculer au point (M) les contraintes principales.

Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les racines de l'équation caractéristique :

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0 ; (\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ Mpa}$$

Avec :

- $I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 2 + (-2) + 2 = 2 \text{ Mpa.}$ (0,25)
- $I_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$
 $I_2 = (2)(-2) + (2)(2) + (-2)(2) - 0^2 - 2^2 - 2^2 = -4 + 4 - 4 - 4 = -8 \text{ Mpa.}$ (0,25)
- $I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 + \tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}$
 $I_3 = (2)(-2)(2) - (2)(0)^2 - (-2)(2)^2 - (2)(0)^2 + (0)(2)(0) = 8 - 8 = 0 \text{ Mpa.}$ (0,25)

Donc : $I_1 = 2 \text{ Mpa} ; I_2 = -8 \text{ Mpa} ; I_3 = 0 \text{ Mpa.}$

❖ Méthode 1

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda = 0 \quad (0,25)$$

Cette équation de 3^{ème} ordre la solution de cette équation comme la suite :

$$\lambda(-\lambda^2 + 2\lambda + 8) = 0 \text{ Soit } \begin{cases} \lambda = \lambda_1 = 0 \dots\dots\dots (1) \\ -\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$-\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0$ Équation de 2^{ème} ordre la solution de cette équation est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(8) = 4 + 32 = 36 ; \Delta = 36 \geq 0.$$

$$\bullet \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2(-1)} = \frac{-2 - 6}{-2} ; \lambda_2 = 4$$

$$\bullet \lambda_3 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2(-1)} = \frac{-2 + 6}{-2} ; \lambda_3 = -2$$

Par convention ces contraintes sont numérotées telque : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Donc : $\sigma_1 = \lambda_2 = 4 ; \sigma_2 = \lambda_1 = 0 ; \sigma_3 = \lambda_3 = -2$

Les contraintes principales sont : $\sigma_1 = 4 ; \sigma_2 = 0 ; \sigma_3 = -2.$

❖ Méthode 2

$$R = 1.763 ; S = 9.33 ; Q = -5.92 ; T = 5.48 ; \alpha = 57.32$$

$$(5 \times 0,25) = 1,25$$

$$0,25 \times 3 = 0,75$$

Par convention ces contraintes sont numérotées telque : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Donc : $\sigma_1 = \lambda_2 = 4 ; \sigma_2 = \lambda_1 = 0 ; \sigma_3 = \lambda_3 = -2$

Les contraintes principales sont : $\sigma_1 = 4 ; \sigma_2 = 0 ; \sigma_3 = -2.$

Les directions principales :

$$\sigma_1 = 4 ; x_1 = \pm \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} = \pm \begin{Bmatrix} 0.707 \\ 0 \\ 0.707 \end{Bmatrix} ; \sigma_2 = 0 ; x_2 = \pm \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} = \pm \begin{Bmatrix} 0.707 \\ 0 \\ 0.707 \end{Bmatrix} ; \sigma_3 = -2 ; x_3 = \pm \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix} = \pm \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(0,25) (0,25) (0,25)

4- Déduire la contrainte de cisaillement maximale $\tau_{\max}$ au point (M).



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{4+2}{2} = 3; \quad \tau_{max} = 3.$$

5- Résulta à aide du cercle de Mohr.

6- Tenseur sphérique et déviateur associé au tenseur de contrainte.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{I_1}{3} = \frac{2}{3} = 0.66 \text{ C}^{te}$$

$$\sigma^{(s)} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.66 & 0 & 0 \\ 0 & 0.66 & 0 \\ 0 & 0 & 0.66 \end{bmatrix}$$

$$\sigma^{(d)} = \begin{bmatrix} (2 - \sigma_m) & 0 & 2 \\ 0 & (-2 - \sigma_m) & 0 \\ 2 & 0 & (2 - \sigma_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.33 & 0 & 2 \\ 0 & -2.66 & 0 \\ 2 & 0 & 1.33 \end{bmatrix}$$

Solution Exercice N°3 : (7.5 points)

1- Déterminer le tenseur des déformations qui dérivent de u .

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} u_1 = 2K_1(X_1^2 - X_3) + K_2X_2 \\ u_2 = -K_2\left(5X_1 + \frac{3}{4}X_3^2\right) \\ u_3 = \frac{1}{2}(3K_2X_2X_3 + 4K_1X_1) \end{cases};$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 4K_1X_1; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{3}{2}K_2X_2$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = -2K_2; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = 0$$

Donc le tenseur de déformation est :

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4K_1X_1 & -2K_2 & 0 \\ -2K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}K_2X_2 \end{pmatrix}$$

2- Le chargement de volume par $K_1=1$ et $K_2=2$.

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 4K_1X_1 + \frac{3}{2}K_2X_2; \quad X_1 = -\frac{3}{4}X_2$$

3- déformations principale au point (P) et $K_1=1$ et $K_2=2$, (P) (1, 1, 1) :

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4K_1X_1 & -2K_2 & 0 \\ -2K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}K_2X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les racines de l'équation caractéristiques :

$$\diamond -\lambda^3 + I_{\varepsilon 1}\lambda^2 - I_{\varepsilon 2}\lambda + I_{\varepsilon 3} = 0$$

Avec :

$$\triangleright I_{\varepsilon 1} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 4 + (0) + 3 = 7.$$

$$\triangleright I_{\varepsilon 2} = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2$$

$$I_{\varepsilon 2} = -4.$$

$$\triangleright I_{\varepsilon 3} = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{yy}\varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}$$

$$I_{\varepsilon 3} = -48.$$

$$\text{Donc : } I_{\varepsilon 1} = 7; \quad I_{\varepsilon 2} = -4; \quad I_{\varepsilon 3} = -48.$$

Méthode 1

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 + 4\lambda - 48 = 0$$

équation N°1



Cette équation de 3^{ème} ordre la solution de cette équation comme la suite :

$$\diamond (x - \alpha)(ax^2 + bx + c) = 0 ;$$

$$\text{Avec } P(\alpha) = 0 ; \quad \text{Donc } \alpha = 3$$

$$\diamond P(\alpha = 3) = -(3)^3 + 7(3)^2 + 4(3) - 48 = 0$$

Donc $\alpha = 3$ c'est la solution de cette équation.

Il est possible d'utiliser la méthode d'appariement (استعمال طريقة المطابقة)

$$P(\alpha) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c) ; P(3) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$$

$$\diamond P(3) = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c = 0 \quad \text{équation N°2}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda^3 + 7\lambda^2 + 4\lambda - 48 = 0 \dots\dots\dots \text{équation N°1} \\ ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c = 0 \dots\dots\dots \text{équation N°2} \end{array} \right\}$$

D'après d'appariement (المطابق طريقة استعمال) :

$$(x - \alpha)(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$\bullet a = -1$$

$$\bullet b - 3a = 7 \rightarrow b - 3(-1) = 7 \rightarrow b = 4$$

$$\bullet -3c = -48 \rightarrow c = \frac{-48}{-3} = 16 \quad \text{On peut écrire :}$$

$$\diamond (x - 3)(-x^2 + 4x + 16) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} (x - 3) = 0 \dots\dots\dots (1) \\ (-x^2 + 4x + 16) = 0 \dots\dots\dots (2) \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3$$

$$\rightarrow (-x^2 + 4x + 16) = 0 \quad \text{Équation de 2^{ème} ordre la solution de cette équation est :}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-1)(16) = 80 ; \quad \Delta = 4\sqrt{5} = 8.94 \geq 0.$$

$$\bullet x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = ; \quad x_2 \cong 6,47$$

$$\bullet x_3 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = ; \quad x_3 \cong -2,47$$

Par la convention ces déformation sont numérotées telque : $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$

$$\text{Donc : } \varepsilon_1 = x_2 = 6,47 ; \quad \varepsilon_2 = x_3 = 3 ; \quad \varepsilon_3 = x_1 = -2,47$$

Les contraintes principales sont : $\varepsilon_1 = 6,47 ; \quad \varepsilon_2 = 3 ; \quad \varepsilon_3 = -2,47.$

❖ Méthode 2

$$R = 20.33 ; S = 2.60 ; Q = 13.25 ; T = 17.64 ; \alpha = 112.07$$

$$(5 \times 0,25) = 0,25$$

Par la convention ces déformation sont numérotées telque : $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$

$$\text{Donc : } \varepsilon_1 = x_2 = 6,47 ; \quad \varepsilon_2 = x_3 = 3 ; \quad \varepsilon_3 = x_1 = -2,47$$

$$(3 \times 0,25) = 0,75$$

Les contraintes principales sont : $\varepsilon_1 = 6,47 ; \quad \varepsilon_2 = 3 ; \quad \varepsilon_3 = -2,47.$

$$(3 \times 0,25) = 0,75$$

$$\frac{20}{20}$$

(Signature)